Bepaling van het massamiddelpunt van een inhomogeen rechthoekig parallellepipedum

1. Inleiding

Het beschrijven van de beweging van een voorwerp kan erg complex zijn. Neem bijvoorbeeld een stuiterende basketbal: terwijl hij beweegt, draait hij rond en vervormt bij elke botsing. Om deze beweging beter te kunnen begrijpen, is het praktisch deze te ontleden in elementaire bewegingen. We kunnen zijn verplaatsing reduceren tot die van een immaterieel punt in de bal, waaromheen hij draait en vervormt. Bij de studie van de verplaatsing van de bal hoeft men zich dus alleen te concentreren op die van het punt, zonder rekening te houden met de rotatie en de vervorming. Dit immaterieel punt wordt het massamiddelpunt genoemd.

Vanuit wiskundig oogpunt wordt het massamiddelpunt gedefinieerd als een gewogen gemiddelde van de positie van de verschillende deeltjes waaruit onze ballon bestaat: als we hem in een oneindig aantal kleine stukjes van dezelfde massa snijden, staat het massamiddelpunt in het midden van al deze stukjes. In het geval van de basketbal, die een symmetrisch object is, bevindt het zich eenvoudigweg in het middelpunt van de bol. Maar hoe bepaal je het voor een object dat niet symmetrisch is? In dit document beschrijven we een experimentele methode om het te vinden. Het is duidelijk dat je het object niet eindeloos kunt verknippen, dan de positie van elk stukje meten en vervolgens het gemiddelde nemen. Je moet slim zijn en noties van stabiliteit gebruiken. Een object is in evenwicht als het middelpunt boven het steunpunt ligt, dat wil zeggen boven het oppervlak begrensd door de randen van het object die in contact staan met de grond. Dus als we het steunvlak reduceren tot een lijn en het object is in evenwicht (labiel), dan komt dat omdat het zwaartepunt verticaal boven deze lijn staat. Deze waarneming geeft een indicatie van de gezochte plaats.

In ons experiment gaan we uit van een doos waarvan het zwaartepunt niet in het symmetriecentrum ligt (we zullen zeggen dat ze inhomogeen is) en we gaan ze drie keer kantelen (eenmaal per dimensie) om de positie te vinden van haar massamiddelpunt.

2 Materiaal en opstelling van het experiment

Voor dit experiment hebben we nodig:

- Een lege doos,
- Kleine voorwerpen of kladpapier,
- Plakband
- Een stift,
- Een gradenboog

- Een vierkant,
- Een waterpas.

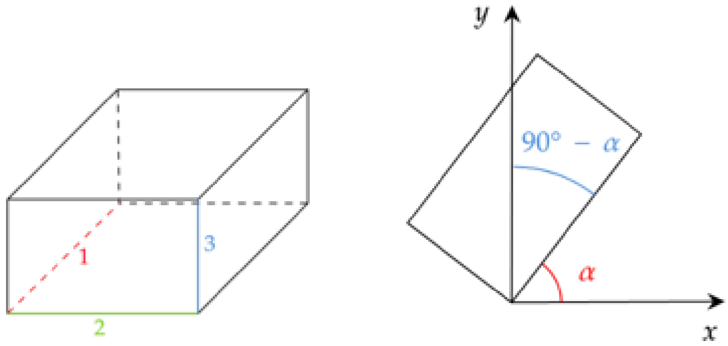
De eerste stap is de doos inhomogeen te maken door er willekeurig kleine voorwerpen of stukjes kladpapier in te bevestigen (zie figuur 1a). Vervolgens moet het werkoppervlak voorbereid worden. De opstelling is weergegeven in figuur 1b. Daartoe moet de gradenboog loodrecht op het oppervlak worden bevestigd met behulp van plakband en / of lijm. Vervolgens moet een rechte lijn getrokken worden uitgaande van het referentiepunt van de gradenboog en loodrecht daarop. Tot slot moet er alleen nog gecontroleerd worden of het oppervlak wel horizontaal is met behulp van de waterpas (zie figuur 1c). De proefopstelling is klaar.

(a)  (b)  (c) 

Figuur 1: (a) verplaatsing van het massamiddelpunt, (b) opstelling en (c) controle van het horizontaal vlak.

3 Werkwijze

Zoals eerder gezegd, geeft het kantelen van de doos ons een indicatie van de positie van het zwaartepunt. Deze indicatie wordt wiskundig vertaald door de vergelijking van een rechte in het kantelvlak: als we naar de doos kijken volgens het xy-vlak en we haar laten kantelen, kunnen we de vergelijking afleiden van de rechte y(x) die door het massamiddelpunt loopt en de rand waarop de doos kantelt. Gaande van het kantelvlak naar het totale volume, wordt de vergelijking van de rechte de vergelijking van een vlak. Door onze doos 3 keer langs verschillende randen te doen kantelen, krijgen we de vergelijking van drie vlakken. Door onze kantelranden goed te kiezen, weten we dat het zwaartepunt zich op het snijpunt bevindt van deze drie vlakken (zie in bijgaande video). Het criterium waarmee rekening moet worden gehouden om de juiste kantelranden te kiezen, is dat ze geen gemeenschappelijk hoekpunt mogen hebben. Als ze er toch een zouden hebben, zou het snijpunt van de 3 vlakken worden gegeven door de positie van dit hoekpunt en niet door de positie van het zwaartepunt. Een ander aspect om rekening mee te houden is dat ten minste één van de gekozen randen loodrecht op de andere twee moet staan. Anders zouden de vlakken elkaar snijden als een rechte en niet als een punt. Een voorbeeld van een goede keuze van randen wordt getoond in figuur 2a. Wanneer deze randen eenmaal gekozen zijn, blijft alleen nog de verschillende kantelingen te doen en de kantelhoek te meten, weergegeven door de hoek α in figuur 2b. Dan moeten de rechten getekend worden die door het zwaartepunt en de rand gaan. Om dit te doen, moet het vierkant eenvoudig ter hoogte van de rand geplaatst worden, een hoek van 90 ° - α gemeten worden en een rechte onder deze hoek getrokken worden. Figuur 2b laat dit zien.



(a) (B)

Figuur 2: (a) Een goede keuze van kantelranden en (b) te meten hoek α.

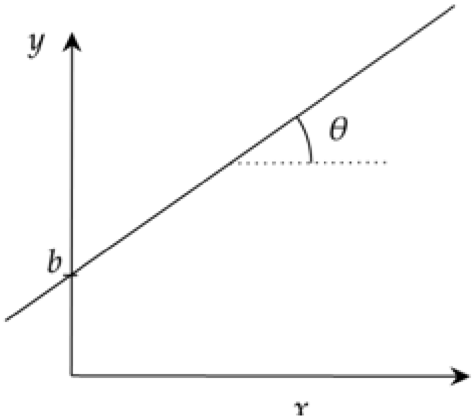
4 Experimentele resultaten

De 3 hoeken worden gemeten en de rechten worden getekend. Er blijft nu nog enkel onze resultaten te interpreteren. De eerste stap bestaat uit het kiezen van een referentiepunt en referentieassen (die we hier x, y en z zullen noemen) op de doos. Ten opzichte hiervan wordt de positie van het zwaartepunt afgeleid. Het eenvoudigst is om als referentiepunt een van de hoekpunten van de doos te kiezen en als assen de 3 randen die vanaf dit hoekpunt vertrekken. Hier kiezen we het hoekpunt op het snijpunt van randen 1 en 2 in figuur 2a en nemen we rand 2 als de x-as, rand 1 als de y-as en de laatste rand als de z-as. Voor elke getekende rechte kunnen we de vergelijking afleiden ten opzichte van ons referentiestelsel. De vergelijking van een rechte in het xy-vlak wordt geschreven onder de vorm: $y = m. x + p$ waarbij m en p constanten zijn die respectievelijk richtingscoëfficiënt en snijpunt met de y-as genoemd worden. De richtingscoëfficiënt wordt berekend als $m = \tan(\theta)$, waarbij θ de hoek is tussen de rechte en de x-as. Het snijpunt met de y-as is de waarde van de y-coördinaat bij $x = 0$. Dus als de rechte door de oorsprong gaat, is p gelijk aan nul. Anders is p de afstand tussen de oorsprong en het snijpunt van de rechte met de y-as, eenvoudig te meten met een liniaal. Figuur 3 toont een grafiek die deze informatie samenvat. Zodra onze 3 vergelijkingen zijn opgeschreven, krijgen we een stelsel met 3 onbekenden om op te lossen. We bekomen bijvoorbeeld het stelsel:

$$\begin{cases} z &= \tan(32°) \cdot x \\ z &= \tan(16,5°) \cdot y \\ y &= \tan(56°) \cdot x + 2,4 \text{ cm} \end{cases}$$

Het is dan noodzakelijk om dit stelsel op te lossen door de onbekenden *x, y* en *z* te vervangen en af te zonderen. In het geval van ons voorbeeld wordt de oplossing gegeven door:

$$\begin{cases} x &= 3,8 \text{ cm} \\ y &= 8 \text{ cm} \\ z &= 2,4 \text{ cm} \end{cases}$$



Figuur 3: Rechte met vergelijking *y(x) = tan (ϑ). x + b*.

Als vector wordt dit resultaat geschreven als volgt: $\overrightarrow{r_z}$ = (3,8 cm; 8 cm; 2,4cm). Dit laatste betekent dat als we de plaats van het zwaartepunt van onze doos willen aanwijzen, we moeten vertrekken vanaf ons referentiepunt en ons 3,8 cm verplaatsen volgens de *x*-richting, 8 cm volgens de *y*-richting en 2,4 cm volgens de *z*-richting.

5. Besluit

In dit document hebben we kort uitgelegd wat het zwaartepunt is en hebben we een experimentele methode beschreven om het te vinden in het specifieke geval van een asymmetrische doos. We hebben een voorbeeld van meetresultaten gegeven en de plaats van het zwaartepunt afgeleid voor dit voorbeeld.

6 Om verder te gaan

We weten nu hoe we experimenteel de plaats van het massamiddelpunt van een inhomogeen rechthoekig parallellepipedum kunnen bepalen. Er is een meer algemene methode die het zwaartepunt van een willekeurig voorwerp bepaalt[1]. Bij deze laatste wordt het voorwerp met een touw opgehangen. Dit zorgt ervoor dat het zwaartepunt zich op de rechte bepaald door het gestrekte touw bevindt. De plaats van het zwaartepunt kan dan worden afgeleid op een manier die vergelijkbaar is met de hierboven beschreven methode: door het object in twee verschillende punten op te hangen, verkrijgen we de vergelijking van twee rechten waarop het zich zou moeten bevinden. Deze twee vergelijkingen kunnen worden opgelost om de gezochte plaats te vinden. Hier hebben we het specifieke geval van het rechthoekige parallellepipedum behandeld omdat dat in het begin gemakkelijker is.

[1] van redelijke grootte en massa.