Détermination du centre de masse d'un parallélépipède rectangle inhomogène

1 Introduction

Décrire le mouvement d'un objet peut s'avérer très complexe. Prenons par exemple un ballon de basket qui rebondit : pendant qu'il se déplace, il tourne sur lui-même et se déforme à chaque rebond. Pour simplifier la compréhension de ce mouvement, il est pratique de le décomposer en mouvements élémentaires. On peut réduire son déplacement à celui d'un point immatériel à l'intérieur du ballon, autour duquel il tourne et se déforme. Ainsi, dans l'étude du déplacement du ballon, on n'a plus qu'à se concentrer sur celui du point, sans prendre en compte la rotation et la déformation. Ce point immatériel est appelé le centre de masse.

Du point de vue mathématique, le centre de masse se définit comme une moyenne pondérée de l'emplacement des différentes particules composant notre ballon : si on le découpe en une infinité de petits bouts de même masse, le centre de masse se trouvera au milieu de tous ces bouts. Dans le cas du ballon de basket, puisque c'est un objet symétrique, il se trouve simplement au centre de la sphère. Mais comment faire pour connaître celui d'un objet qui n'est pas symétrique ? Dans ce document, nous allons décrire une méthode expérimentale pour y accéder. Évidemment, on ne peut pas découper l'objet à l'infini, mesurer l'emplacement de chaque bout et puis faire la moyenne. Il faut ruser en passant par des notions de stabilité. Un objet est à l'équilibre si son centre se trouve au-dessus de sa base de sustentation, c'est-à-dire au-dessus de la surface délimitée par les bords de l'objet qui sont en contact avec le sol. Ainsi, si l'on réduit la base de sustentation à une ligne et que l'objet est à l'équilibre (instable), c'est que le centre de masse est à la verticale par rapport à cette ligne. Cette observation permet de donner un indicateur de l'emplacement recherché.

Dans notre expérience, nous allons partir d'une boîte dont le centre de masse ne se trouve pas au centre de symétrie (nous dirons qu'elle est inhomogène) et nous allons la faire basculer trois fois (une fois par dimension) pour trouver l'emplacement de son centre de masse.

2 Matériel et montage de l'expérience

Pour cette expérience, nous aurons besoin :

- D'une boite vide,
- De petits objets ou du papier brouillon,
- De ruban adhésif
- D'un marqueur,
- D'un rapporteur

- D’une équerre,
- D’un niveau à bulle.

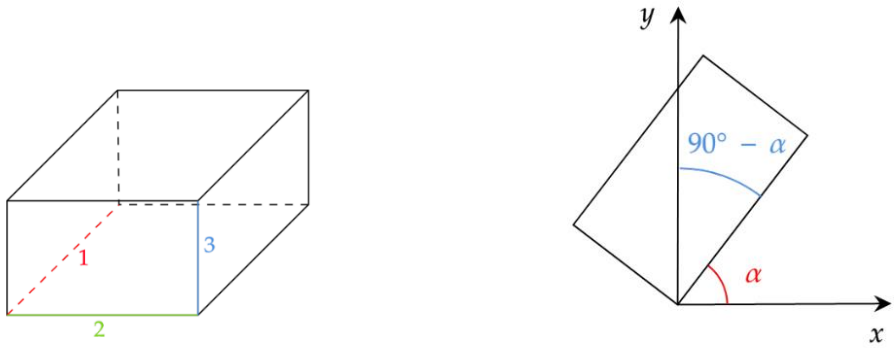
La première étape consiste à rendre la boite inhomogène en y fixant les petits objets ou des boulettes de papier brouillon à l'intérieur de façon aléatoire (voir Figure 1a). Ensuite, il faut préparer la surface de travail. Le montage à effectuer est présenté à la Figure 1b. Pour l'obtenir, il faut fixer le rapporteur perpendiculairement à la surface à l'aide de ruban adhésif et/ou de pâte adhésive. Ensuite, il faut tracer une droite partant de la référence du rapporteur et perpendiculairement à ce dernier. Finalement, il ne reste plus qu'à vérifier que la surface est bien horizontale à l'aide du niveau à bulle (voir Figure 1c). Le dispositif expérimental est terminé.

(a) (b) (c)

Figure 1: (a) Déplacement du centre de masse, (b) dispositif final et (c) vérification d'horizontalité.

3 Mode opératoire

Comme dit précédemment, le basculement de la boite nous donne une indication sur l'emplacement de son centre de masse. Cette indication se traduit mathématiquement par l'équation d'une droite dans le plan de basculement : si nous regardons la boite selon le plan *xy* et que nous la faisons basculer, nous pouvons déduire l'équation de la droite *y(x)* passant par le centre de masse et l'arête sur laquelle la boite bascule. En passant du plan de basculement au volume total, l'équation de la droite devient l'équation d'un plan. En faisant basculer 3 fois notre boîte selon des arêtes différentes, nous obtenons l'équation de trois plans. En choisissant bien nos arêtes de basculement, nous pouvons affirmer que le centre de masse se trouve à l'intersection de ces trois plans (voir illustration dans la vidéo d’accompagnement). Le critère à prendre en considération pour bien choisir les arêtes de bascule est qu'elles ne peuvent pas avoir un sommet en commun. Dans le cas où elles en auraient un, l'intersection des 3 plans serait donnée par l'emplacement de ce sommet et non l'emplacement du centre de masse. Un autre aspect à prendre en compte est qu'il faut qu'au moins une des arêtes choisies soit perpendiculaire aux deux autres. Dans le cas contraire, les plans "s'intersecteraient" en une droite et non en un point. Un exemple de bon choix d'arêtes est présenté à la Figure 2a. Une fois ces arêtes choisies, il ne reste plus qu'à procéder aux différents basculements et à mesurer l'angle de bascule, représenté par l'angle α sur la Figure 2b. De là, il faut tracer les droites passant par le centre de masse et l'arête. Pour ce faire, il suffit de placer l'équerre au niveau de l'arête, de mesurer un angle de $90° - \alpha$ et de tracer une droite à cet angle. La Figure 2b permet de s'en convaincre.



(a) (b)

Figure 2 : (a) Un bon choix d'arêtes de bascule et (b) angle α à mesurer.

4 Résultats expérimentaux

Les 3 angles sont mesurés et les droites sont tracées. À partir de là, il ne reste plus qu'à interpréter nos résultats. La première étape consiste à choisir un point et des axes (que nous appellerons ici *x, y* et *z*) de référence sur la boite. La position du centre de masse sera déduite par rapport à ce point. Le plus simple est de choisir comme point un des sommets de la boîte et comme axes les 3 arêtes qui partent de ce sommet. Ici, nous choisirons le sommet à l'intersection des arêtes 1 et 2 de la Figure 2a et nous prendrons l'arête 2 comme axe *x*, l'arête 1 comme axe *y* et la dernière arête comme axe *z*. Pour chaque droite tracée, nous pouvons déduire son équation par rapport à notre référentiel. L'équation d'une droite dans le plan *xy* s'écrit sous la forme : $y = m \, . \, x + p$ où *m* et *p* sont des constantes appelées respectivement coefficient angulaire et ordonnée à l'origine. Le coefficient angulaire se déduit de la fonction trigonométrique tangente. Par définition de cette fonction, on peut écrire $m = tan(\vartheta)$ où ϑ est l'angle intercepté entre l'abscisse *x* et la droite. L'ordonnée à l'origine, comme son nom l'indique, témoigne de la valeur de l'ordonnée *y* lorsque l'abscisse *x* s'annule. Ainsi, si la droite passe par le point de référence, *p* vaudra zéro. Sinon, *p* vaut la distance séparant le point de référence du croisement de la droite avec *y*. Il se mesure donc simplement avec une règle. La Figure 3 reprend un graphique résumant ces informations. Une fois nos 3 équations écrites, nous obtenons un système à 3 inconnues à résoudre. Par exemple, nous pourrions avoir le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} z & = \tan(32°) \cdot x \\ z & = \tan(16,5°) \cdot y \\ y & = \tan(56°) \cdot x + 2,4 \text{ cm} \end{cases}$$

Il faut ensuite résoudre ce système en y isolant et remplaçant les inconnues *x, y* et *z*. Dans le cas de notre exemple, la solution est donnée par :

$$\begin{cases} x &= 3,8 \text{ cm} \\ y &= 8 \text{ cm} \\ z &= 2,4 \text{ cm} \end{cases}$$

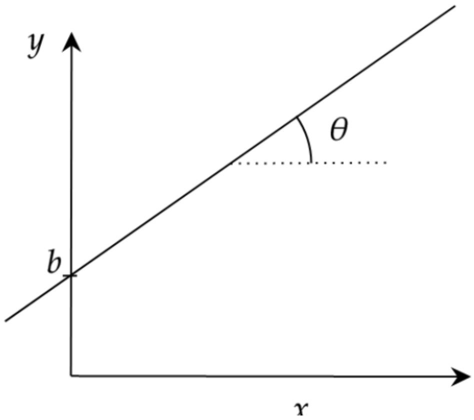


Figure 3 : Droite d'équation *y(x) = tan(ϑ) . x + b*.

En notations vectorielles, ce résultat s'écrit : $\overrightarrow{r_{cm}}$ = (3,8 cm; 8 cm; 2,4 cm). Ce dernier signifie que si l'on veut désigner l'emplacement du centre de masse de notre boite, il faut partir de notre point de référence, se déplacer de 3,8 cm selon *x*, 8 cm selon *y* et 2,4 cm selon *z*.

5 Conclusion

Dans ce document, nous avons brièvement introduit ce qu'est le centre de masse et nous avons décrit une méthode expérimentale pour le trouver dans le cas particulier d'une boite asymétrique. Nous avons présenté un exemple de mesures effectuées et déduit l'emplacement du centre de masse dans cet exemple.

6 Pour aller plus loin

Nous savons désormais comment déterminer expérimentalement l'emplacement du centre de masse d'un parallélépipède rectangle inhomogène. Il existe une méthode plus générale qui détermine le centre de masse de n'importe quel objet[1]. Dans cette dernière expérience, l'objet est suspendu au-dessus du sol à l'aide d'une corde. Ceci permet d'assurer que le centre de masse se trouve dans le prolongement du segment tracé par la corde. L'emplacement du centre de masse se déduit alors de façon similaire à la méthode que nous avons décrite plus haut : en suspendant l'objet sur deux orientations différentes, nous obtenons l'équation de deux droites dans lesquelles il est censé se trouver. Ces deux équations peuvent être résolues pour obtenir l'emplacement recherché. Ici, nous avons traité le cas particulier du parallélépipède rectangle car il est plus simple à aborder dans un premier temps.

[1] d'une taille et de masse raisonnable.